Ano 6, n. 18, 2013
Seção Artigos
05/11/2013

Análise combinatória: a importância dos métodos de contagem – parte 1

João Carlos Cataldo

João Carlos Cataldo é professor do Instituto de Aplicação Fernando Rodrigues da Silveira, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro (CAp-UERJ). Tem mestrado em Matemática pela Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro (UNIRIO) e é autor de livros didáticos.

Introdução

Ao que tudo indica, foi a necessidade de calcular o número de possibilidades existentes de resultados dos jogos que incentivou o estudo dos métodos de contagem. A análise combinatória é uma consequência do desenvolvimento de métodos que permitem contar, de forma indireta, o número de elementos de um conjunto, estando esses elementos agrupados sob certas condições. Por sua vez, pode-se dizer que a teoria das probabilidades decorre da necessidade de avaliar hipóteses e de tomar decisões.

Já foi bastante comum creditar-se a decisão de qualquer evento tão somente à intervenção divina ou a alguma causa sobrenatural. Simplesmente não havia espaço para uma abordagem que atribuísse ao fenômeno do acaso, e apenas a ele, determinadas ocorrências. Talvez por isso a abordagem matemática desse fenômeno tenha começado tão recentemente, há pouco mais de 500 anos. Foi então que surgiu a teoria da análise combinatória, como um capítulo novo da matemática, no século XVII.

Por solucionarem problemas de jogos de azar, Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1601-1665) impulsionaram essa área. Pascal escreveu, em 1654, o *Tratado do Triângulo Aritmético*, uma exposição das propriedades dos coeficientes binomiais e das relações entre eles.

PASCAL

FERMAT

Outros matemáticos também deram suas contribuições para a teoria das probabilidades. O primeiro que tratou o assunto como uma ciência foi Christiaan Huygens (1629-1695). Depois, os mais importantes, porque trataram a probabilidade como um ramo da matemática, foram Jakob Bernoulli (1654-1705), em a *Arte da Conjectura*, publicado em 1713, e Abraham de Moivre (1667-1754) que, em 1718, escreveu a *Doutrina da Probabilidade*.

Este artigo abordará um tema da análise combinatória: combinação com repetição de elementos, ou seja, o cálculo do número de grupamentos não ordenados com ou sem repetição de elementos. As ideias que serão expostas são elementares e têm como pré-requisito o conhecimento das combinações simples, que são aquelas que não têm ordem, nem repetição de elementos.

Soluções inteiras e positivas

A questão em análise é calcular o número de soluções inteiras e positivas de equações do seguinte tipo:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = p\,,\ \ p \in N^*$$

Considere-se a equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$. Cada uma de suas soluções é uma lista da forma (x_1, x_2, x_3, x_4), na qual as incógnitas x_1, x_2, x_3 e x_4 são números inteiros e positivos cuja soma vale 7. Para determinar o número de soluções inteiras e positivas dessa equação, pode-se empregar uma estratégia, parcelando o número 7 em unidades do seguinte modo:

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 7$$

Entre as 7 unidades, há 6 espaços que estão ocupados pelos sinais de adição. Cada solução dessa equação pode ser obtida separando as unidades com três vírgulas, já que se têm 4 incógnitas. Essas vírgulas devem ser colocadas em 3 dos 6 espaços, conforme sugere o exemplo seguinte:

$$1\ \_\ 1\ \_\ 1\ \_\ 1\ \_\ 1\ \_\ 1\ \_\ 1$$

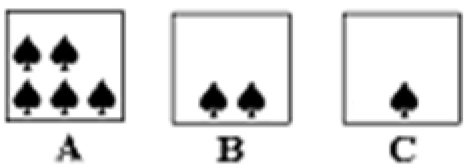
$$1 + 1\ ,\ 1\ ,\ 1 + 1 + 1\ ,\ 1$$

Esse exemplo corresponde à solução (2, 1, 3, 1). Assim, escolhem-se três desses espaços para determinar uma solução. Observe outros exemplos na tabela abaixo:

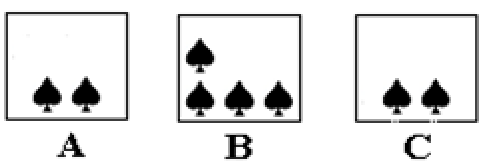
Escolha das posições das vírgulas	Soluções correspondentes
$1,\ 1+1+1+1,\ 1,\ 1$	$(1, 4, 1, 1)$
$1,\ 1,\ 1,\ 1+1+1+1$	$(1, 1, 1, 4)$
$1+\ 1,\ 1+1,\ 1+1,\ 1$	$(2, 2, 2, 1)$

Para contar o número de soluções inteiras e positivas dessa equação, basta determinar, portanto, de quantos modos distintos três posições podem ser escolhidas dentre as 6 disponíveis. Como não há ordem nessas escolhas, o número de modos de escolher corresponde ao número de combinações simples de 6 posições tomadas 3 a 3, que pode ser calculado do seguinte modo: $C_6^3 = \dfrac{6 \times 5 \times 4}{3!} = 20$. Então, a equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$ tem 20 soluções.

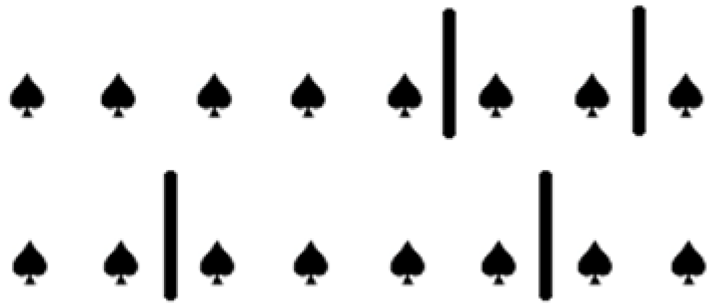
Outra forma de resolver esse problema é considerar, por exemplo, 3 gavetas distintas A, B e C para guardar 8 objetos iguais a ♠. Pode-se calcular de quantos modos distintos é possível arrumar os objetos nessas gavetas, considerando que cada gaveta deve ficar com pelo menos um objeto ♠. Uma possível arrumação é:



Nessa arrumação, escolhem-se as gavetas para colocar os 8 objetos do seguinte modo: AAAAABBC, isto é, a gaveta A é escolhida 5 vezes; a gaveta B, duas vezes; a gaveta C, uma vez. Essas escolhas podem ser feitas em qualquer ordem, pois todos os objetos são iguais. As escolhas AABBBBCC corresponderiam à seguinte arrumação, naturalmente diferente da primeira:



Para resolver o problema, podem-se alinhar os objetos e separar os três grupos que devem ser colocados respectivamente nas gavetas A, B e C. Veja-se abaixo uma esquematização dos exemplos dados:



Note que, entre os 8 objetos, há 7 espaços, sendo 2 deles escolhidos para colocar os traços de separação. Cada escolha de dois espaços em um conjunto de 7 é uma combinação simples de 7 elementos tomados dois a dois. Logo, o número de modos de arrumar 8 objetos iguais em 3 gavetas diferentes é igual a $C_7^2 = \frac{7 \times 6}{2!} = 21$.

De outro modo, as gavetas A, B e C vão guardar, respectivamente, x_1, x_2 e x_3 objetos, sendo $x_1 + x_2 + x_3 = 8$. Então, o número de modos de arrumar os 8 objetos nas três gavetas é igual ao número de soluções inteiras positivas dessa equação, no caso, 21.

Sintetizando, de modo análogo aos problemas anteriores, calcular o número de soluções inteiras e positivas da equação $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = P$, com $p \in N^*$, corresponde a calcular o número de modos de arrumar *P* objetos iguais em n gavetas distintas, de tal forma que cada gaveta contenha pelo menos um objeto. As *P* unidades (ou *P* objetos), organizados lado a lado, geram *P* – 1 espaços. Para separar *n* grupos, colocam-se *n* – 1 vírgulas (ou *n* – 1 traços). Portanto, o número total de soluções pode ser representado por C_{p-1}^{n-1}.

Dando continuidade a essa discussão, na parte 2 deste artigo, serão abordadas as soluções inteiras e não negativas.